Concursul Interjudețean "Grigore Moisil" Urziceni
Ediția a VII-a, 28-30 ianuarie 2011

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir astfel încât șirurile $(a_{2n-1})_{n\geq 1}$, $(a_{2n})_{n\geq 1}$ și $(a_{5n})_{n\geq 1}$ sunt progresii aritmetice. Demonstrați că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică.

Cristinel Mortici

Subiectul 2. Fie $a, b, c \in (0,1)$ astfel încât $ab + bc + ca = 1$. Demonstrați că

$$\frac{10\sqrt{3}}{9} \leq a + b + c + abc < 2.$$

* * *

Subiectul 3. Determinați cel mai mare număr natural k, pentru care există numere naturale nenule m, n, p astfel încât

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{k}{k+1}.$$

Cristinel Mortici

Subiectul 4. Fie patrulaterul $ABCD$ și punctele M, N, P, Q astfel încât

$$2\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB},\ \ 2\overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{NB},\ \ 2\overrightarrow{PD} = -\overrightarrow{PC},\ \ 2\overrightarrow{QD} = -\overrightarrow{QA}.$$

Demonstrați că $3(MP + NQ) \leq AB + BC + 2CD + 2AD$.

Gazeta Matematică

Concursul Interjudețean "Grigore Moisil" Urziceni

Ediția a VII-a, 28-30 ianuarie 2011

BAREM CLASA A IX-A

Subiectul 1

(2 puncte) $a_{2n-1} = a_1 + (n-1)p,\ a_{2n} = a_2 + (n-1)q,\ a_{5n} = a_5 + (n-1)r$

(2 puncte) $5p = 2r$ exprimând a_{15} ca element al șirurilor $(a_{2n-1})_{n\geq 1}$ și $(a_{5n})_{n\geq 1}$

(2 puncte) $5q = 2r$ exprimând a_{20} ca element al șirurilor $(a_{2n})_{n\geq 1}$ și $(a_{5n})_{n\geq 1}$

(1 punct) $p = q$ și finalizare

Subiectul 2

(2 puncte) $(1-a)(1-b)(1-c) = 1 - a - b - c + ab + bc + ca - abc\ \ (*)$

(1 punct) $a + b + c + abc = 1 + ab + bc + ca - (1-a)(1-b)(1-c) < 2$

(1 punct) $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, deci $a + b + c \geq \sqrt{3}$

(2 puncte) $(1-a)(1-b)(1-c) \leq \left(1 - \frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = 2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}$

(1 punct) Înlocuire în $(*)$ și finalizare

Subiectul 3

(2 puncte) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$

(1 punct) Prin absurd există $k' > 41$ și m, n, p astfel ca $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{k'}{k'+1}$

(1 punct) $\frac{41}{42} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1$

(1 punct) Dacă $2 \leq m \leq n \leq p$, obține $m = 2$

(1 punct) Cu $m = 2$, obține $n = 3$

(1 punct) Cu $m = 2, n = 3$ obține $p = 7$, contradicție, deci $k = 41$

Subiectul 4

(1 punct) Figura corectă

(3 puncte) $3MP \leq 2AD + BC$

(3 puncte) $3NQ \leq 2CD + AB$

REMARCĂ: UN EVALUATOR VA ACORDA FIECĂREI PROBLEME UN NUMĂR ÎNTREG DE PUNCTE

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie $m, n \geq 4$ numere naturale astfel încât

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0.$$

Demonstrați că

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn} + \frac{1}{2^{m+n}}.$$

Cristinel Mortici

Subiectul 2. Se consideră funcția $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ definită prin $f(n) = 1! + 3! + \cdots + (2n-1)!$. Demonstrați că există funcții injective $p, q\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, să avem

$$f(n+2) = p(n+1)f(n+1) - q(n)f(n).$$

Cristinel Mortici

Subiectul 3. Fie a, b, c numere complexe, cel puțin unul fiind în modul strict mai mare decât 1. Demonstrați că există un număr complex z astfel încât $|z| = 1$ și $|az^2 + bz + c| > 1$.

*** * ***

Subiectul 4. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale cu rația $r > 0$ și fie $p \geq 1$ un număr natural prim cu r. Arătați că mulțimea $\{x_n \mid p \text{ divide } x_n\}$ este nevidă, iar elementele sale ordonate crescător formează o progresie aritmetică.

Gazeta Matematică

Concursul Interjudețean “Grigore Moisil” Urziceni
Ediția a VII-a, 28-30 ianuarie 2011

BAREM CLASA A X-A

Subiectul 1

(1 punct) Deoarece $7n^2 - 1$ și $7n^2 - 2$ nu pot fi pătrate perfecte,

(2 puncte) din $m^2 < 7n^2$ rezultă $m^2 \leq 7n^2 - 3$ sau $7n^2 \geq m^2 + 3$

(2 puncte) Arată $m^2 + 3 > \left(m + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}\right)^2$ și cum $7n^2 \geq m^2 + 3$, avem $7n^2 > \left(m + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}\right)^2$

(1 punct) Obține $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn} + \frac{1}{m^2 n}$

(1 punct) Din $2^m \geq m^2$ și $2^n > n$ rezultă $\frac{1}{m^2 n} > \frac{1}{2^{m+n}}$

Observație. *Condiția $m, n \geq 4$ este impusă numai pentru a scuti rezolvitorul și de tratarea altor cazuri, însă concluzia este adevărată și fără această condiție.*

Subiectul 2

(1 punct) $f(n+1) - f(n) = (2n+1)!$

(2 puncte) $f(n+2) - f(n+1) = (2n+2)(2n+3)\big(f(n+1) - f(n)\big)$

(2 puncte) $p(n) = 2n(2n+1) + 1$, $q(n) = (2n+2)(2n+3)$

(1 punct) p este injectivă

(1 punct) q este injectivă

Subiectul 3

Observație. *Notăm* $w = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$

(1 punct) Prin absurd pentru orice $|z| = 1$, avem $|f(z)| \leq 1$, unde $f(z) = az^2 + bz + c$

(2 puncte) $|3a| = |f(1) + wf(w) + w^2 f(w^2)| \leq |f(1)| + |wf(w)| + |w^2 f(w^2)| \leq 3$

(2 puncte) $|3b| = |f(1) + w^2 f(w) + wf(w^2)| \leq |f(1)| + |w^2 f(w)| + |wf(w^2)| \leq 3$

(2 puncte) $|3c| = |f(1) + f(w) + f(w^2)| \leq |f(1)| + |f(w)| + |f(w^2)| \leq 3$

Subiectul 4

(1 punct) $x_n = x_1 + (n-1)r$

(1 punct) Cum $(p, r) = 1$, există $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $ap - br = 1$, adică $1 + br = \mathcal{M}_p$.

(2 puncte) Cu $s = bx_1 + 1$, obținem $x_s = x_1 + (s-1)r = x_1(1 + br) = \mathcal{M}_p$

(1 punct) $x_m - x_n$ se divide cu p dacă și numai dacă $m - n$ se divide cu p, deoarece $(p, r) = 1$

(1 punct) Notează $x_t = \min A$, apoi deduce că $A = \{x_t, x_{t+p}, x_{t+2p}, x_{t+3p}, \ldots\}$

(1 punct) Şirul $x_t, x_{t+p}, x_{t+2p}, x_{t+3p}, \ldots$ este progresie aritmetică

REMARCĂ: UN EVALUATOR VA ACORDA FIECĂREI PROBLEME UN NUMĂR ÎNTREG DE PUNCTE

Concursul Interjudețean “Grigore Moisil” Urziceni

Ediția a VII-a, 28-30 ianuarie 2011

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie șirul $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ și $a_{n+2} = 3^{a_{n+1}} - 2^{a_n}$, pentru $n = 1,2,3, \dots$. Arătați că:

a) Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

b) Pentru orice număr natural $n \geq 1$, are loc inegalitatea $a_n \geq n!$.

Cristinel Mortici

Subiectul 2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care există un număr natural $k \geq 2$ astfel încât

$$\det(A^k - B^k) = \det(A^k - B^k + AB - BA).$$

Demonstrați că $(AB - BA)^k = 0_2$.

Florin Stănescu, Găești

Subiectul 3. Fie $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ o funcție cu proprietatea că $f(aX + bY) = af(X) + bf(Y)$, oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $a, b \in \mathbb{C}$. Demonstrați că există o matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $f(X) = \operatorname{tr}(DX)$, oricare ar fi $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Subiectul 4. Fie $a_1 = 2$ și $na_{n+1} = (2n + 2)(a_n + n2^n)$, $n = 1,2,3, \dots$. Calculați

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{a_1 a_2 \dots a_n} .$$

Gazeta Matematică

Concursul Interjudețean “Grigore Moisil” Urziceni
Ediția a VII-a, 28-30 ianuarie 2011

BAREM CLASA A XI-A

Subiectul 1

(1 punct) Presupune că $a_n < a_{n+1}$
(1 punct) Demonstrează că $3^k - 2^k \geq k$
(2 puncte) $a_{n+2} = 3^{a_{n+1}} - 2^{a_n} > 3^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+1}} \geq a_{n+1}$
(1 punct) $a_{n+2} > 3^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+1}} > 3^{(n+1)!} - 2^{(n+1)!}$
(2 puncte) Arată că $3^{(n+1)!} - 2^{(n+1)!} > (n+2)!$, eventual $3^{(n+1)!} - 2^{(n+1)!} > 2^{(n+1)!} > (n+2)!$.

Subiectul 2

(2 puncte) Demonstrează că $\operatorname{tr}[(A^k - B^k)(AB - BA)] = 0$
(2 puncte) Obține $\operatorname{tr}[(A^k - B^k)(AB - BA)] = \operatorname{tr}(A^k - B^k) \cdot \operatorname{tr}(AB - BA)$ (ambii termeni nuli)
(1 punct) $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr} X \cdot \operatorname{tr} Y$ implică $\det(X+Y) = \det X + \det Y$
(1 punct) Cu $X = A^k - B^k$, $Y = AB - BA$ și folosind ipoteza, obține $\det(AB - BA) = 0$
(1 punct) $(AB - BA)^2 = 0_2$, deci $(AB - BA)^k = (AB - BA)^2 (AB - BA)^{k-2} = 0_2$

Subiectul 3

(2 puncte) Consideră E_{ij} matricea cu toate elementele nule, exceptând pe cel de pe poziția (i, j), acesta fiind egal cu 1 și notează $f\left(E_{ij}\right) = e_{ij}$
(2 puncte) Dacă $X = \left(x_{ij}\right)$, atunci $X = \sum_{i,j} x_{ij} E_{ij}$ și $f(X) = \sum_{i,j} x_{ij} f(E_{ij}) = \sum_{i,j} x_{ij} e_{ij}$
(2 puncte) Dacă definim $d_{ij} = e_{ji}$, atunci $\sum_{i,j} x_{ij} e_{ij} = \operatorname{tr}(DX)$, deci $f(X) = \operatorname{tr}(DX)$
(1 punct) Verificarea (suficient numai afirmarea) faptului că $f(X) = \operatorname{tr}(DX)$ satisface problema

Subiectul 4

(3 puncte) $a_n = n(n+1)2^{n-1}$
(1 punct) $a_1 a_2 \dots a_n = n!\,(n+1)!\,2^{\frac{n(n-1)}{2}}$
(2 puncte) Apelează la limita $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$ sau la estimările $1 \leq n! \leq n^n$ și $1 \leq (n+1)! \leq (n+1)^n$
(1 punct) Obține $L = \sqrt{2}$, folosind (eventual) criteriul radicalului de ordin n.

REMARCĂ: UN EVALUATOR VA ACORDA FIECĂREI PROBLEME UN NUMĂR ÎNTREG DE PUNCTE

Concursul Interjudețean "Grigore Moisil" Urziceni
Ediția a VII-a, 28-30 ianuarie 2011

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie H_1, H_2 subgrupuri ale grupului $(\mathbb{Q}, +)$ având proprietatea că orice număr $q \in \mathbb{Q}$ se scrie sub forma $q = h_1 + h_2$ cu $h_1 \in H_1$ și $h_2 \in H_2$. Mai mult, se știe că această scriere se face în mod unic, în sensul că dacă mai are loc și relația $q = h'_1 + h'_2$ cu $h'_1 \in H_1$ și $h'_2 \in H_2$, atunci $h_1 = h_1^{'}$ și $h_2 = h_2^{'}$. Arătați că unul din subgrupurile H_1 și H_2 este $\{0\}$, iar celălalt este $\mathbb{Q}$.

* * *

Subiectul 2. Fie $k > 0$ și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^y f(t)\, dt \leq k|x - y|\,.$$

Demonstrați că orice primitivă a funcției f este suma a două funcții strict monotone.

Dinu Teodorescu, Târgoviște

Subiectul 3. Fie $y_n: [0,1] \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,3, \ldots$ funcții continue, unde $y_1(x) = 1$ și

$$y_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{y_n(t)}\, dt\,, \qquad \forall\ x \in [0,1], \qquad n = 1,2,3, \ldots\,.$$

Demonstrați că pentru orice $a \in (0,1)$, șirul $\left(y_n(a)\right)_{n\geq 1}$ este convergent către a^2.

* * *

Subiectul 4. Fie $f: [-\pi/4,\ \pi/4] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $f(x)f(-x) = 1$, oricare ar fi $x \in [-\pi/4,\ \pi/4]$. Calculați

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{(1 + 2\sin^2 x)(1 + f(x))}\,.$$

Gazeta Matematică

Concursul Interjudețean "Grigore Moisil" Urziceni

Ediția a VI-a, 28-30 ianuarie 2011

BAREM CLASA A XII-A

Subiectul 1

(1 punct) Presupunem prin absurd că $H_1 \neq \{0\}$ și $H_2 \neq \{0\}$.

(1 punct) Există $\frac{m}{n} \in H_1$ și $\frac{p}{q} \in H_2$, unde $m, n, p, q > 0$ sunt numere naturale

(2 puncte) $mp = \frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n} (np\ termeni) \in H_1$ și $mp = \frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q} (mq\ termeni) \in H_2$,

(2 puncte) Avem reprezentările diferite $mp = mp + 0 = 0 + mp$, prima oară cu $mp \in H_1, 0 \in H_2$, iar a doua oară cu $0 \in H_1, mp \in H_2$, contradicție

(1 punct) Rezultă de exemplu $H_1 = \{0\}$ și demonstrează că $H_2 = \mathbb{Q}$.

Subiectul 2

(1 punct) Cu $x \leftrightarrow y$ în relația dată, obține $\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq k|x - y| \quad (*)$

(2 puncte) Pentru $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ alege $F_1(x) = -(k+1)x,\ F_2(x) = \int_0^x f(t)\,dt + (k+1)x$

(3 puncte) F_2 injectivă: dacă $F_2(x) = F_2(y)$, atunci $\int_x^y f(t)\,dt = (k+1)(x-y)$ și din $(*)$ iese $x = y$

(1 punct) F_2 este injectivă și continuă, deci strict monotonă

Subiectul 3

(2 puncte) $y_n(x) = c_n x^{2-\frac{1}{2^{n-2}}}$

(2 puncte) $c_{n+1} = \frac{\sqrt{c_n}}{1-\frac{1}{2^n}}$

(2 puncte) $c_n \to 1$ (de exemplu $\ln c_{n+1} - \frac{1}{2}\ln c_n \to 0$, deci $\ln c_n \to 0$)

(1 punct) Finalizare

Subiectul 4

(1 punct) Efectuează schimbarea $x = -t$

(2 puncte) Obține $2I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$

(1 punct) Scrie $\sin^2 x$ în funcție de $\operatorname{tg}^2 x$

(1 punct) Efectuează schimbarea $t = \operatorname{tg} x$

(2 puncte) Obține $I = \frac{\pi}{9}\sqrt{3}$

REMARCĂ: UN EVALUATOR VA ACORDA FIECĂREI PROBLEME UN NUMĂR ÎNTREG DE PUNCTE