Concursul de matematică și informatică
Grigore Moisil – Ediţia a XII-a
Urziceni 31 ianuarie – 2 februarie 2020
Clasa a VII-a-SUBIECT

Subiectul 1.

Se notează cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x.

a) **Calculați $\left[\sqrt{2020 \cdot 2021}\right]$** **(4 puncte)**

b) **Demonstrați că $\left[\sqrt{1 \cdot 2}\right] + \frac{\left[2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3}\right]}{2} + \frac{\left[3 \cdot \sqrt{3 \cdot 4}\right]}{3} + \cdots + \frac{\left[2020 \cdot \sqrt{2020 \cdot 2021}\right]}{2020} \geq 1010 \cdot 2021$** **(5 puncte)**

1 punct oficiu

Subiectul 2.

În triunghiul ABC ascuțitunghic, cu $m(\sphericalangle A) = 60°$ se consideră $BD \perp AC$ $(D \in AC)$, $CE \perp AB$ $(E \in AB)$ și M mijlocul laturii BC. Arătați că triunghiul DEM este echilateral. **(9 puncte)**

G.M. nr 10/2019

1 punct oficiu

Subiectul 3.

Se notează cu s(x) suma cifrelor numărului natural x .Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuațiile:

a) **x+s(x)+s(s(x))=2020 ;** **(4 puncte)**

b) **$x + s(x) + s(s(x)) + s\left(s(s(x))\right) = 2020.$** **(5 puncte)**

1 punct oficiu

TIMP DE LUCRU 3 ore

Concursul de matematică și informatică
Grigore Moisil – Ediția a XII-a
Urziceni 31 ianuarie – 2 februarie 2020
Clasa a VII-a-BAREM

Subiectul 1.

Se notează cu [x] partea întreagă a numărului real x.

a) Calculați $\left[\sqrt{2020\cdot 2021}\,\right]$

b) Demonstrați că $\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\frac{\left[2\cdot\sqrt{2\cdot 3}\right]}{2}+\frac{\left[3\cdot\sqrt{3\cdot 4}\right]}{3}+\cdots+\frac{\left[2020\cdot\sqrt{2020\cdot 2021}\right]}{2020}\geq 1010\cdot 2021$

Barem

a) $2020^2 \leq 2020\cdot 2021 < 2021^2$ **(2 puncte)**

$2020 \leq \sqrt{2020\cdot 2021} < 2021 \Longrightarrow \left[\sqrt{2020\cdot 2021}\right] = 2020$ **(2 puncte)**

b) Se consideră cunoscută relația $x \leq y \Longrightarrow [x] \leq [y], \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\left[\sqrt{2\cdot 3}\right] \leq \sqrt{2\cdot 3} \Longrightarrow 2\left[\sqrt{2\cdot 3}\right] \leq 2\sqrt{2\cdot 3} \Longrightarrow \left[2\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]\right] \leq \left[2\sqrt{2\cdot 3}\right] \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 2\left[\sqrt{2\cdot 3}\right] \leq \left[2\sqrt{2\cdot 3}\right] \Longrightarrow \left[\sqrt{2\cdot 3}\right] \leq \frac{\left[2\sqrt{2\cdot 3}\right]}{2}$ **(2 puncte)**

Urmărind raționamentul anterior, se obține:

$$\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\frac{\left[2\sqrt{2\cdot 3}\right]}{2}+\frac{\left[3\sqrt{3\cdot 4}\right]}{3}+\cdots+\frac{\left[2020\sqrt{2020\cdot 2021}\right]}{2020}\geq$$

$$\geq \left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\cdots+\left[\sqrt{2020\cdot 2021}\right] = 1+2+3+\cdots 2020$$
$$= 1010\cdot 2021$$

(3 puncte)

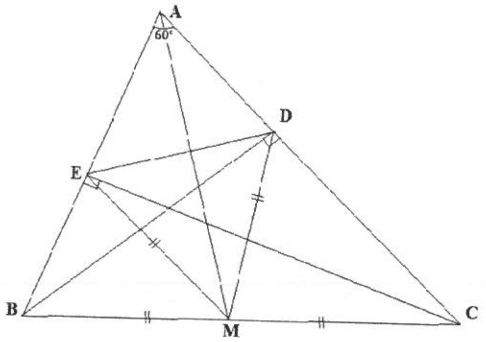
1 punct oficiu

Subiectul 2

În triunghiul ABC ascuțitunghic, cu $m(\sphericalangle A) = 60°$ se consideră $BD \perp AC\ (D \in AC)$,
$CE \perp AB(E \in AB)$ și M mijlocul laturii BC. Arătați că triunghiul DEM este echilateral.

G.M. nr 10/2019

Barem



Notăm $m\sphericalangle DBM = \alpha, m\sphericalangle ECM = \beta$

$\left.\begin{array}{l}\Delta BEC - \text{dreptunghic în } \widehat{E} \\ EM - \text{mediană}\end{array}\right\} \Rightarrow EM = \frac{BC}{2} = BM \Longrightarrow \Delta BEM - \text{isoscel} \Longrightarrow \sphericalangle MEB \equiv \sphericalangle EBM(30° + \alpha) \Longrightarrow m\widehat{EMB} = 120° - 2\alpha$ **(3puncte)**

$\left.\begin{array}{l}\Delta BDC - \text{dreptunghic în } \widehat{D} \\ DM - \text{mediană}\end{array}\right\} \Rightarrow DM = MC = \frac{BC}{2} \Longrightarrow \Delta DMC - \text{isoscel} \Longrightarrow$

$\sphericalangle MDC \equiv \sphericalangle MCD(30° + \beta) \Longrightarrow m\widehat{DMC} = 120° - 2\beta$ **(3puncte)**

$\left.\begin{array}{l}m(\sphericalangle EMD) = 180° - m\widehat{EMB} - m\widehat{DMC} = 60° \\ \text{Cum } ME = DM = \frac{BC}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DEM - \text{echilateral}$

(3puncte)

1 punct oficiu

Subiectul 3.

Se notează cu $s(x)$ suma cifrelor numărului natural x .Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuațiile:

a) $x+s(x)+s(s(x))=2020$;

b) $x+s(x)+s(s(x))+s\left(s(s(x))\right)=2020$.

Barem

a) $x \equiv s(x) \equiv s(s(x)) (\bmod 9)$ **(2 puncte)**

$\Rightarrow x+s(x)+s(s(x)) \vdots 3$ **(1 punct)**

cum $3 \nmid 2020 \Rightarrow S=\emptyset$ **(1 punct)**

b) $4x \equiv 2020 \equiv 4 (\bmod 9) \Rightarrow x \equiv 1 (\bmod 9)$ **(1 punct)**

$x<2020$

De la 1 la 2020 cea mai mare sumă a cifrelor o au numerele 999 si 1999

$\Rightarrow s(x) \leq 28 \Rightarrow s(s(x)) \leq s(28)=10 \Rightarrow s\left(s(s(x))\right) \leq s(9)=9$

(1 punct)

$x=2020-s(x)-s(s(x))-s\left(s(s(x))\right) \geq 2020-28-10-9=1973$

(1 punct)

Există cinci numere între 1973 și 2020 care la împărțirea cu 9 dau restul 1: 2017, 2008, 1999, 1990 și 1981.

Cel care verifică relația este 1990, deci $x=1990$

(2 puncte)

1 punct oficiu

Concursul de matematică și informatică
Grigore Moisil – Ediția a XII-a
Urziceni 31 ianuarie – 2 februarie 2020
Clasa a VIII-a

Subiectul 1.

Se notează cu $[a]$, $\{a\}$ partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a.

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $[2020x] + \{2021x\} = 2021$ **(4 puncte)**

b) $\{2^{n+1}x\} + 2^{n+1} = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[2x + \frac{1}{2}\right] + \left[2^2x + \frac{1}{2}\right] + \cdots + \left[2^nx + \frac{1}{2}\right]$, , $n \in \mathbb{N}$

(5 puncte)

1punct oficiu

Subiectul 2

Se consideră piramida patrulateră regulată VABCD și punctele M și N, mijloacele muchiilor BC, respectiv VD. Arătați că AB=AV dacă și numai dacă măsura unghiului dintre dreptele AB și MN este egală cu 30°. **(9 puncte)**

GM,nr11/2019

1punct oficiu

Subiectul 3.

Se consideră numerele reale strict pozitive x,y,z,cu proprietatea x+y+z=3. Arătați că:

a) $\sqrt{2020x+1} + \sqrt{2020y+1} + \sqrt{2020z+1} \leq 3\sqrt{2021}$; **(4 puncte)**

b) $\frac{x^{2020}}{\sqrt{2020x+1}} + \frac{y^{2020}}{\sqrt{2020y+1}} + \frac{z^{2020}}{\sqrt{2020z+1}} \geq \frac{3}{\sqrt{2021}}$. **(5 puncte)**

1punct oficiu

TIMP DE LUCRU 3 ore

Concursul de matematică și informatică
Grigore Moisil – Ediția a XII-a
Urziceni 31 ianuarie – 2 februarie 2020
Clasa a VIII-a-BAREM

Subiectul 1.

Se notează cu [a], {a} partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a.

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $[2020x] + \{2021x\} = 2021$ **(4 puncte)**

b) $\{2^{n+1}x\} + 2^{n+1} = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[2x + \frac{1}{2}\right] + \left[2^2x + \frac{1}{2}\right] + \cdots + \left[2^nx + \frac{1}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}$ **(5 puncte)**

1punct oficiu

Barem

a) $[2020x] + \{2021x\} = 2021 \Rightarrow \{2021x\} = 2021 - [2020x] \Rightarrow \{2021x\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{2021x\} = 0 \Rightarrow 2021x = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k}{2021}$

(2puncte)

$\left[\frac{2020}{2021}k\right] = 2021 \Rightarrow 2021 \leq \frac{2020k}{2021} < 2022 \Rightarrow 2021^2 \leq 2020k < 2022 \cdot 2021 \Rightarrow 2022 + \frac{1}{2020} \leq k < 2023 + \frac{2}{2020} \Rightarrow k = 2023 \Rightarrow x = \frac{2023}{2021}$

(2 puncte)

b) Pentru calcularea sumei din membrul drept se folosește în mod repetat identitatea lui Hermite: $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x], \forall x \in \mathbb{R}$

Așadar $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$; $[2x] + \left[2x + \frac{1}{2}\right] = [2^2x]$;

$[2^2x] + \left[2^2x + \frac{1}{2}\right] = [2^3x], \ldots, [2^nx] + \left[2^nx + \frac{1}{2}\right] = [2^{n+1}x]$ **(2 puncte)**

Ecuația devine $\{2^{n+1}x\} + 2^{n+1} = [2^{n+1}x]$ **(1 punct)**

Finalizare, $x \in [1; 2)$ **(2 puncte)**

1punct oficiu

Subiectul 2

Se consideră piramida patrulateră regulată VABCD şi punctele M şi N, mijloacele muchiilor BC,respectiv VD.Arătaţi că AB=AV dacă şi numai dacă măsura unghiului dintre dreptele AB şi MN este egală cu 30°.**(9 puncte)**

1punct oficiu

GM,nr11/2019

Barem

Notăm $AB = 2x, AV = 2a, MN = y$

I. $m(\widehat{AB; MN}) = 30° \Longrightarrow AB = AV$

În ΔMNP din teorema cosinusului $\Longrightarrow a^2 = 4x^2 + y^2 - 2xy\sqrt{3}$ **(2puncte)**

În ΔNOM din teorema cosinusului $\Longrightarrow a^2 = x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}$ **(2puncte)**

$\Longrightarrow y = x\sqrt{3} \Longrightarrow a = x \Longrightarrow AB = AV$ **(3puncte)**

II. $AB = AV \Longrightarrow m(\widehat{AB; MN}) = 30°$

ΔMNP – dreptunghic in $\hat{N} \Longrightarrow m\widehat{MNP} = 30°$. **(2 puncte)**

1punct oficiu

Subiectul 3.

Se consideră numerele reale strict pozitive x,y,z,cu proprietatea x+y+z=3. Arătaţi că:

a) $\sqrt{2020x+1} + \sqrt{2020y+1} + \sqrt{2020z+1} \le 3\sqrt{2021}$; **(4 puncte)**

b) $\frac{x^{2020}}{\sqrt{2020x+1}} + \frac{y^{2020}}{\sqrt{2020y+1}} + \frac{z^{2020}}{\sqrt{2020z+1}} \ge \frac{3}{\sqrt{2021}}$. **(5 puncte)**

1 oficiu punct

Barem

a) $\left(\sqrt{2020x+1} + \sqrt{2020y+1} + \sqrt{2020z+1}\right)^2 \le (1+1+1)[2020(x + y + z) + 3] = 9 \cdot 2021$ **(3 puncte)**

$\Longrightarrow \sqrt{2020x+1} + \sqrt{2020y+1} + \sqrt{2020z+1} \le 3\sqrt{2021}$ **(1 punct)**

b) $\frac{x^{2020}}{\sqrt{2020x+1}} + \frac{y^{2020}}{\sqrt{2020y+1}} + \frac{z^{2020}}{\sqrt{2020z+1}} \ge \frac{(x+y+z)^{2020}}{3^{2018}(\sqrt{2020x+1}+\sqrt{2020y+1}+\sqrt{2020z+1})}$

(3 puncte)

$\frac{(x+y+z)^{2020}}{3^{2018}(\sqrt{2020x+1}+\sqrt{2020y+1}+\sqrt{2020z+1})} \ge \frac{9}{3\sqrt{2021}} = \frac{3}{\sqrt{2021}}$ **(2 puncte)**

1 oficiu punct

Concursul de matematică şi informatică

Grigore Moisil – Ediţia a XII-a

Urziceni 31 ianuarie – 2 februarie 2020

Clasa a IX-a-SUBIECT

1.Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir astfel încât şirurile $(a_{2n-1})_{n\geq 1}$, $(a_{2n})_{n\geq 1}$ şi $(a_{5n})_{n\geq 1}$ sunt progresii aritmetice. Demonstraţi că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică.

Cristinel Mortici (2011)

2.Fie ABCDE un pentagon convex şi punctele $P\in(DE)$, $Q\in(CD)$ astfel încât $\frac{PE}{PD}=\frac{QC}{QD}=2$. Dacă M şi N sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi ABE, să se arate că $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$.

G.M.3/2019-27660

3.Fie $p,q\in N^*$ astfel încât $\sqrt{2}+\sqrt{3}<\frac{p}{q}$. Arătaţi că $\frac{p}{q}-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)>\frac{1}{2p^3q}$.

Radu Gologan

Fiecare subiect se notează de la 1 la 10 puncte (1 punct din oficiu)

TIMP DE LUCRU 3 ore

Concursul de matematică şi informatică
Grigore Moisil – Ediţia a XII-a
Urziceni 31 ianuarie – 2 februarie 2020
Clasa a IX-a-BAREM

Subiectul 1

(3puncte) $a_{2n-1}=a_1+(n-1)\cdot p$; $a_{2n}=a_2+(n-1)\cdot q$; $a_{5n}=a_5+(n-1)\cdot r$

(3puncte) **5p=2r exprimând a_{15} ca element al şirurilor $(a_{2n-1})_{n\geq 1}$ şi $(a_5n)_{n\geq 1}$**

(2 puncte) **5q=2r exprimând a_{20} ca element al şirurilor $(a_{2n})_{n\geq 1}$ şi $(a_5n)_{n\geq 1}$**

(1 punct) **p=q şi finalizare.**

1 punct din oficiu.

Subiectul 2

(3puncte) **P şi Q împart segmentele orientate $\overrightarrow{ED}$ şi respectiv $\overrightarrow{CD}$ în raportul k=-2**

(3puncte) $\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD})$ **şi** $\overrightarrow{NP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{NE}+2\overrightarrow{ND})$

(3puncte) $\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{NP}=\vec{0}$ **deci** $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$

1 punct din oficiu.

Subiectul 3

	Oficiu	**1p**
	Arată că $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin Q$	**2p**
	$\frac{p}{q}-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\frac{p-q\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{q}=\frac{p^2-q^2\left(5+2\sqrt{6}\right)}{q\left(p+q\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)}=\frac{\left(p^2-5q^2\right)^2-24q^2}{q\left(p+q\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)\left(p^2-5q^2+2\right.}$	**2p**
	Cum $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin Q$ **şi fracţia este pozitivă, rezultă că** $\left(p^2-5q^2\right)^2-24q^2\geq 1$	**2p**
	Avem $q\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)<p\Rightarrow p+q\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)<2p$ **, iar** $p^2-\left(5-2\sqrt{6}\right)q^2<p^2$	**2p**
	Deduce inegalitatea	**1p**

Concursul de matematică şi informatică
Grigore Moisil – Ediţia a XII-a
Urziceni 31 ianuarie – 2 februarie 2020
Clasa a X-a-SUBIECT

1. Se dau numerele complexe de modul 1, nereale, z_1, z_2, z_3. **Ce se poate spune despre numărul complex** $z=\dfrac{z_1+z_2+z_3-z_1z_2z_3}{1-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1}$ **?**

Radu Gologan

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale nenule ecuaţia:

$$a^x\cdot b^{\frac{1}{x}}+b^x\cdot a^{\frac{1}{x}}+\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{x+\frac{1}{x}}=(a+b)^2$$ **, unde** $a,b\in(1,+\infty)$.

Traian Tămâian, Carei

3. Se consideră z_1, z_2 **şi** z_3 **numere complexe distincte două câte două, de module egale. Ştiind că numerele** $z_1+\dfrac{1}{z_1^2}$, $z_2+\dfrac{1}{z_1z_2}$ **şi** $z_3+\dfrac{1}{z_1z_3}$ **sunt reale, determinaţi** z_1.

Marian Andronache (Gazeta Matematică, 2019)

Fiecare subiect se notează de la 1 la 10 puncte (1 punct din oficiu)
TIMP DE LUCRU 3 ore

Concursul de matematică şi informatică
Grigore Moisil – Ediţia a XII-a
Urziceni 31 ianuarie – 2 februarie 2020
Clasa a X-a - BAREM

1.	Oficiu	**1p**
	Cum $\overline{z_i} = \frac{1}{z_i}$, pentru $i \in \{1,2,3\}$, avem $\overline{z} = \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}-\overline{z_1 z_2 z_3}}{1-\overline{z_1}\,\overline{z_2}-\overline{z_2}\,\overline{z_3}-\overline{z_3}\,\overline{z_1}} = \frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}-\frac{1}{z_1z_2z_3}}{1-\left(\frac{1}{z_1z_2}+\frac{1}{z_2z_3}+\frac{1}{z_3z_1}\right)} =$	**3p**
	$= \frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2-1}{z_1z_2z_3-(z_3+z_1+z_2)} =$	**3p**
	$= \frac{1-(z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2)}{(z_3+z_1+z_2)-z_1z_2z_3} = \frac{1}{z}$	**2p**
	$z \cdot \overline{z} = 1 \Leftrightarrow \lvert z \rvert = 1$	**1p**
2.	Oficiu	**1p**
	Observă $x=1$ soluție	**1p**
	Dacă $x<0 \Rightarrow a^x \cdot b^{\frac{1}{x}} + b^x \cdot a^{\frac{1}{x}} + \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{x+\frac{1}{x}} < 1+1+1 = 3 < (a+b)^2$	**2p**
	Dacă $x \in (0,+\infty)-\{1\}$, aplicând inegalitatea mediilor obținem $a^x \cdot b^{\frac{1}{x}} + b^x \cdot a^{\frac{1}{x}} + \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{x+\frac{1}{x}} \geq 2\sqrt{a^{x+\frac{1}{x}} \cdot b^{x+\frac{1}{x}}} + \left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)} = 2(ab)^{\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)} + \left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)} >$	**3p**
	$> 2ab + \left(a^2+b^2\right) = (a+b)^2$ (S-a folosit inegalitatea $x+\frac{1}{x} > 2$, pentru orice $x \in (0,+\infty)-\{1\}$)	**2p**
	$x=1$ este soluție unică	**1p**
3.	Oficiu	**1p**
	Fie $\lvert z_1 \rvert = \lvert z_2 \rvert = \lvert z_3 \rvert = r$, $z_k = r(\cos t_k + i \sin t_k)$, $t_k \in [0,2\pi)$, unde $k=\overline{1,3}$. Presupunând, prin absurd, că $z_k \notin R$, pentru niciun $k \in \{1,2,3\}$, obținem că punctele $O(0)$, $M(z_k)$, $A\left(\frac{1}{z_1z_k}\right)$şi $B\left(z_k+\frac{1}{z_1z_k}\right) \in Ox$ determină un paralelogram, $k=\overline{1,3}$.	**1p**
	Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul $OAB \Rightarrow \frac{r}{\sin(t_1+t_k)} = \frac{\frac{1}{r^2}}{\sin t_k}$, de unde $\frac{\sin(t_1+t_k)}{\sin t_k} = r^3$, $k=\overline{1,3}$	**2p**
	$tgt_1 = tgt_2 = tgt_3 \Rightarrow$cel puțin două dintre numerele z_1, z_2, $z_3$coincid, contradicție cu	**2p**

	ipoteza	
	Dacă cel puțin unul dintre numerele z_k este real, fie acesta $z_1, \lvert z_1 \rvert = r$. Din $z_2 + \frac{1}{z_1 z_2} \in R$ şi $z_3 + \frac{1}{z_1 z_3} \in R$, rezultă că: fie $z_2, z_3 \in R$, dar $\lvert z_1 \rvert = \lvert z_2 \rvert = \lvert z_3 \rvert = r$ ar însemna că cel puțin două sunt identice, contradicție; fie $1 \pm \frac{1}{r^3} = 0$ şi $z_2, z_3 \notin R$.	2p
	$r = \pm 1$ şi verifică $r = 1$, deci $z_1 = 1$	2p

Concursul de matematică și informatică
Grigore Moisil – Ediția a XII-a
Urziceni 31 ianuarie – 2 februarie 2020
Clasa a XI-a

Subiectul 1.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-1-\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{4}-\ldots-\sqrt[n]{n}\right)$.

Gazeta matematica

Subiectul 2. Fie $A, B \in M_2(C)$ **pentru care există un număr natural** $k \geq 2$ **astfel încât** $\det\left(A^k - B^k\right) = \det\left(A^k - B^k + AB - BA\right)$.

Demonstrați că $(AB - BA)^k = O_2$.

Florin Stănescu, Găești

Subiectul 3. Fie $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in N^*}$ **un şir de numere raționale, unde** $p_n, q_n \in N^*$, **pentru orice** $n \in N^*$, **astfel ca** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{q_n} = \sqrt{2}$. **Calculați** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{q_n^2 + p_n} - q_n\right)$.

Radu Gologan

Fiecare subiect se notează de la 1 la 10 puncte (1 punct din oficiu)

TIMP DE LUCRU 3 ore

Concursul de matematică și informatică
Grigore Moisil – Ediția a XII-a
Urziceni 31 ianuarie – 2 februarie 2020
Clasa a XI-a-BAREM

Subiectul 1

(3 puncte) Cum $3^n \geq n^3$ pentru orice$n \geq 1$rezulta ca $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$ pentru orice $n \geq 1$
(3 puncte) Rezulta ca$2n - 1 - \sqrt{2} - \sqrt[3]{3} - \sqrt[4]{4} - \cdots - \sqrt[n]{n} \geq 2n - n\sqrt[3]{3} = n(2 - \sqrt[3]{3})$
(3 puncte) Cum $2 > \sqrt[3]{3}$ rezulta ca $\lim_{n\to\infty} n(2 - \sqrt[3]{3}) = \infty$ deci limita ceruta este $+\infty$

1 punct oficiu

Subiectul 2

(3 puncte) Demonstrează că $\operatorname{tr}[(A^k - B^k)(AB - BA)] = 0$
(3 puncte) Obține $\operatorname{tr}[(A^k - B^k)(AB - BA)] = \operatorname{tr}(A^k - B^k) \cdot \operatorname{tr}(AB - BA)$ (ambii termeni nuli)
(1 punct) $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr} X \cdot \operatorname{tr} Y$ implică $\det(X + Y) = \det X + \det Y$
(1 punct) Cu $X = A^k - B^k$, $Y = AB - BA$ și folosind ipoteza, obține $\det(AB - BA) = 0$
(1 punct) $(AB - BA)^2 = 0_2$, deci $(AB - BA)^k = (AB - BA)^2(AB - BA)^{k-2} = 0_2$

1 punct oficiu

Subiectul 3

	Oficiu	1p
	Observăm că $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$, deoarece altfel șirul $(q_n)_n$ ar avea un subșir constant $q_{n_k} = m \in N^*$ și din $\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n_k}}{m} = \sqrt{2}$ ar rezulta că $\lim_{n\to\infty} p_{n_k} = m\sqrt{2} \notin N^*$,absurd	3p
	$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{q_n^2 + p_n} - q_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{\sqrt{q_n^2 + p_n} + q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} \frac{q_n}{\sqrt{q_n^2 + p_n} + q_n} =$	3p
	$= \frac{\sqrt{2}}{2}$, **cu justificare**	3p

Concursul de matematică şi informatică
Grigore Moisil – Ediţia a XII-a
Urziceni 31 ianuarie – 2 februarie 2020
Clasa a XII-a – SUBIECT

1.Fie $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ cu proprietatea că mulțimea $A = \{x + y\alpha \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$este un inel față de operațiile uzuale din $\mathbb{C}$, având exact 4 elemente inversabile. Să se arate că $A = \mathbb{Z}[i]$.

G.M. Nr. 12/2019

2.Fie mulțimea $A = \{a^2 + 2b^2 \mid a, b \in N\}$. Arătați că înmulțirea numerelor naturale determină pe A o structură de monoid.

Radu Gologan

3.Fie funcția $f : [0, +\infty) \to R$ ce admite primitiva $F : [0, +\infty) \to R$, cu proprietatea $F(0) = 0$. Ştiind că $2x\left|f\left(x^2\right)\right| \le F\left(x^2\right)$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, arătați că $F \equiv 0$.

Radu Gologan

Fiecare subiect se notează de la 1 la 10 puncte(1 punct din oficiu)

TIMP DE LUCRU 3 ore

Concursul de matematică şi informatică

Grigore Moisil – Ediţia a XII-a

Urziceni 31 ianuarie – 2 februarie 2020

Clasa a XII-a -BAREM

Subiectul 1

Cum $U(A)$ este este subgrup cu 4 elemente al lui $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ obținem:
$U(A) = U_4 = \{1, -1, i, -i\}$.

(1 punct)

Cum $i \in A$, există $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $i = u + v\alpha$, $v \neq 0$, de unde $\alpha = \frac{i-u}{v}$. **(1 punct)**

Cum $\alpha^2 \in A$ rezultă $\alpha^2 = x + y\alpha$ cu $x, y \in \mathbb{Z}$, deci α este rădăcina polinomului $f = X^2 - yX - x \in \mathbb{Z}[X]$.

(2 puncte)

Atunci şi $\bar{\alpha} = -\frac{i+u}{v}$ este rădăcina lui f, iar din relațiile lui Viete obținem $\alpha + \bar{\alpha} = y \in \mathbb{Z}$ şi $\alpha\bar{\alpha} = -x \in \mathbb{Z}$.

(1 punct)

Atunci $(\alpha - \bar{\alpha})^2 = (\alpha + \bar{\alpha})^2 - 4\alpha\bar{\alpha} \in \mathbb{Z}$, adică $\left(\frac{2i}{v}\right)^2 \in \mathbb{Z}$, deci $\frac{4}{v^2} \in \mathbb{Z}$, adică $v^2 = 1$sau
$v^2 = 4$.

(1punct)

Dar $\alpha\bar{\alpha} = \frac{u^2+1}{v^2} \in \mathbb{Z}$ şi cum u^2+1 nu e divizibil cu 4 obținem $v^2=1$, deci $v = \pm 1$ şi atunci $\alpha = \varepsilon(i - u)$ cu $\varepsilon \in \{-1,1\}$. **(2 puncte)**

Cum $i \in A$ rezultă imediat că $\mathbb{Z}[i] \subset A$. Reciproc dacă $z = x + y\alpha \in A$, atunci $z = x + +y\varepsilon(i - u) = x - \varepsilon yu + \varepsilon yi$ cu $\varepsilon \in \{-1,1\}$,deci $z \in \mathbb{Z}[i]$. Rezultă $A \subset \mathbb{Z}[i]$, deci$A = \mathbb{Z}[i]$.

(1 punct)

1 punct oficiu

Subiectul 2

	Oficiu	**1p**
	Este suficient să demonstrăm că produsul a două numere din A este de aceeaşi formă. Considerăm $x, y \in A$, $x = a_1^2 + 2b_1^2$, $y = a_2^2 + 2b_2^2$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \square$. $xy = \left(a_1^2 + 2b_1^2\right)\left(a_2^2 + 2b_2^2\right) = \left(a_1 + i\sqrt{2}b_1\right)\left(a_2 + i\sqrt{2}b_2\right)\left(a_1 - i\sqrt{2}b_1\right)\left(a_2 - i\sqrt{2}b_2\right) =$	**2p**
	$= \left(a_1a_2 - 2b_1b_2 + i\sqrt{2}\left(b_1a_2 + a_2b_1\right)\right)\cdot\left(a_1a_2 - 2b_1b_2 - i\sqrt{2}\left(b_1a_2 + a_2b_1\right)\right) =$	**3p**
	$= \left(a_1a_2 - 2b_1b_2\right)^2 + 2\left(b_1a_2 + a_2b_1\right)^2 \in A$	**3p**
	Cum $0 = 0^2 + 2\cdot 0^2 \in A$ şi înmulțirea numerelor naturale este asociativă, obținem că mulțimea A împreună cu înmulțirea numerelor naturale este monoid	**1p**

Subiectul 3

	Oficiu	1p
	Vom demonstra că dacă o funcție $g:[0,\infty)\to\square$ derivabilă, cu $g(0)=0$ are proprietatea că $\lvert g'(x)\rvert \le M\cdot g(x)$, pentru orice $x\in[0,\infty)$, unde $M>0$, atunci $g\equiv 0$.	1p
	Considerăm funcția $h:[0,\infty)\to\square$, $h(x)=e^{-Mx}\cdot g(x)$. $h'(x)=-Me^{-Mx}\cdot g(x)+e^{-Mx}\cdot g'(x)=e^{-Mx}\left(-Mg(x)+g'(x)\right)\le 0$, pentru orice $x\in[0,\infty)$	3p
	$h'(x)\le 0$ pentru $x\in[0,\infty)\Rightarrow h$ este descrescătoare pe $[0,\infty)$. $h(x)=e^{-Mx}\cdot g(x)\le h(0)=0$, pentru orice $x\in[0,\infty)$, de unde obținem că $g(x)\le 0$, pentru orice $x\in[0,\infty)$ Cum însă $g(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,\infty)\Rightarrow g\equiv 0$	2p
	Aplicăm rezultatul demonstrat pentru $g(x)=F\left(x^2\right)$, $F:[0,+\infty)\to\square$. Folosind substituția $x^2=t$, obținem că, dacă $\lvert F'(t)\rvert\le M\cdot F(t)$, pentru orice $t\in[0,\infty)$, unde $M>0$, atunci $F\equiv 0$ Cum, din ipoteză, $\left\lvert f\left(x^2\right)\cdot 2x\right\rvert\le 1\cdot F\left(x^2\right)$, pentru orice $x\in[0,\infty)\Rightarrow F\equiv 0$	3p