Liceul Teoretic Grigore Moisil Urziceni
Strada Teilor, nr. 5

Concursul Interjudețean "Grigore Moisil" Urziceni Ediția a VI-a, 29-31 ianuarie 2010

CLASA A IX-A

Subiectul 1

Demonstrați că pentru orice număr natural $n \geq 2$, are loc inegalitatea

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

Subiectul 2

Aflați al optlea termen al șirului $1440, 1716, 1848, \ldots$ ai cărui termeni sunt produsul termenilor corespunzători (primul cu primul, al doilea cu al doilea, etc) ai anumitor două progresii aritmetice.

Subiectul 3

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că mulțimea $\{n, n+1,\ n+2, \ldots, n^3+n^2+n+1,\ n^3+n^2+n+2\}$

a) conține cel puțin un pătrat perfect.

b) conține puterea a patra a unui număr natural.

Subiectul 4

Fie $ABCDE$ un pentagon și M, N, P, Q punctele de intersecție ale segmentelor ce unesc mijloacele laturilor opuse în patrulaterele $BCDE$, $CDEA$, $EABD$, $ABCE$, respectiv. Demonstrați că $MNPQ$ este paralelogram dacă și numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

BAREM CLASA A IX-A

Subiectul 1

Verificare $P(2)$..1 punct

$P(n): 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1} > \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$..1 punct

Reduce $P(n) \to P(n+1)$ la $Q(n): \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{n^2}{2(n+1)(2n+1)}$...2 puncte

Demonstrează prin inducție $Q(n)$...3 puncte

Subiectul 2

Termenul general este an^2+bn+c..2 puncte

$a=-72, b=492, c=1020$..3 puncte

Termenul este 348...2 puncte

Subiectul 3

$(n+1)^2$ este un pătrat perfect..2 puncte

Presupune prin absurd că există $k^4 < n$ cu $(k+1)^4 > n^3+n^2+n+2$......................................2 puncte

$n^3+n^2+n+2 > k^{12}+k^8+k^4+2 > (k+1)^4$..3 puncte

Subiectul 4

$r_M = \frac{1}{4}(r_B+r_C+r_D+r_E)$, etc...2 puncte

Calculează $r_M+r_P-r_N-r_Q$...2 puncte

$ABCD$ paralelogram $r_A+r_C=r_B+r_D$..2 puncte

Finalizare...1 punct

Liceul Teoretic Grigore Moisil Urziceni
Strada Teilor, nr. 5

Concursul Interjudețean "Grigore Moisil" Urziceni Ediția a VI-a, 29-31 ianuarie 2010

CLASA A X-A

Subiectul 1.

Notăm cu X mulțimea numerelor naturale mai mari sau egale cu 8 și fie $f: X \to X$ o funcție cu proprietatea că $f(x+y) = f(xy)$, oricare ar fi numerele naturale $x \geq 4$ și $y \geq 4$.
Dacă $f(8) = 9$, calculați $f(9)$.

Subiectul 2.

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$|z_1| = |z_2| = \left|\frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = 1.$$

Dați un exemplu de astfel de triplete cu $z_3 = 0$. Demonstrați că dacă $z_3 \neq 0$, atunci $|z_3| = 1$.

Subiectul 3

Fie $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ funcții periodice de perioade $7, 19$, respectiv 31. Demonstrați că dacă funcția $f + g + h$ este constantă, atunci funcțiile f, g și h sunt constante.
(Fie $T \geq 1$ un număr natural. Spunem că o funcție $y : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ este periodică de perioadă T dacă $y(x+T) = y(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$).

Subiectul 4. Rezolvați ecuațiile:

a) $\log_{0,5}(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \log_{0,5}(1 + \operatorname{ctg}^2 x) = 1.$

b) $\log_{1,5}(1 + \sin^2 x) \cdot \log_{1,5}(1 + \cos^2 x) = 1.$

BAREM CLASA A X-A

Subiectul 1

$x = y = 4 \rightarrow f(16) = f(8) = 9$……………………1 punct

$x = y = 8 \rightarrow f(64) = f(16) = 9$……………………2 puncte

$f(20) = f(16 + 4) = f(64) = 9$……………………2 puncte

$x = 4, y = 5 \rightarrow f(9) = f(20) = 9$……………………2 puncte

Subiectul 2

$z_1 = 1, z_2 = \omega$……………………2 puncte

Cu $w = \frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}$, rezultă $z_3 = \frac{z_1z_2-w(z_1+z_2)}{w-z_1-z_2}$……………………2 puncte

$\overline{z_1} = 1/z_1, \overline{z_2} = 1/z_2, \overline{w} = 1/w$……………………1 punct

$\overline{z_3} = 1/z_3$……………………2 puncte

Subiectul 3

Notăm $p = 7, q = 19, r = 31$

T_1 și T_2 sunt perioade, atunci $\alpha T_1 + \beta T_2$ este perioadă……………………1 punct

pq este perioadă pentru h……………………2 puncte

h admite perioadele pq și r prime între ele, deci 1 este perioadă……………………3 puncte

Finalizare……………………1 punct

Subiectul 4

a) inegalitatea mediilor și finalizare……………………4 puncte

b) inegalitatea mediilor și finalizare……………………3 puncte

Liceul Teoretic Grigore Moisil Urziceni
Strada Teilor, nr. 5

Concursul Interjudețean “Grigore Moisil” Urziceni Ediția a VI-a, 29-31 ianuarie 2010

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Demonstrați că șirul $x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4$, cu $x_0 \in (0,1)$ este convergent și apoi calculați limita șirului $y_n = nx_n$.

Subiectul 2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ o matrice cu proprietatea că

$$A^3 + A = \frac{1}{4}I_2 + \frac{3}{2}A^2 + \frac{1}{4}A^4.$$

Demonstrați că există o matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $B^2 = A$.

Subiectul 3. a) Fie $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1}$ șiruri de numere reale și funcțiile $f_n: (0,1) \to \mathbb{R}$ definite pentru orice $x \in (0,1)$ și $n \in \mathbb{N}^*$ prin $f_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$.
Arătați că dacă pentru orice $x \in (0,1)$ avem $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, atunci există un șir de numere reale $(w_n)_{n\geq 1}$ convergent la zero, pentru care $|f_n(x)| \leq w_n$, oricare ar fi $x \in (0,1)$ și $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Dați exemplu de funcții $g_n: (0,1) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$, oricare ar fi $x \in (0,1)$, pentru care nu există niciun șir de numere reale $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent la zero, care să satisfacă relația $|g_n(x)| \leq v_n$, oricare ar fi $x \in (0,1)$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 4. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $\det A = d \neq 0$. Demonstrați că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, avem:

a) $\det((\ldots(A^*)^* \ldots)^*)^* = d^{(n-1)^k}$ (k semne " $*$ ")

b) $((\ldots(A^*)^* \ldots)^*)^* = d^{\frac{(n-1)^k + (-1)^{k-1}}{n}} \cdot A^{(-1)^k}$ (k semne " $*$ "). *(X^* este adjuncta matricei X).*

Concursul Interjudețean "Grigore Moisil"
Urziceni Ediția a VI-a, 29-31 ianuarie 2010

BAREM CLASA A XI-A

Subiectul 1

x_n mărginit (inferior)……………………………………………………………………………………………………2 puncte

x_n monoton descrescător……………………………………………………………………………………………2 puncte

Calculează limita șirului y_n eventual cu lema Cesaro-Stolz…………………………………………………3 puncte

Subiectul 2

$(I_2 - A)^4 = 0_2$………1 punct

$(I_2 - A)^2 = 0_2$………3 puncte

$A = \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_2\right)^2$……………………………………………………………………………………………………3 puncte

Subiectul 3

a_n, b_n, c_n tind la zero (rezultă de exemplu din $f_n\left(\frac{1}{2}\right) \to 0, f_n\left(\frac{1}{3}\right) \to 0, f_n\left(\frac{1}{4}\right) \to 0$)……………………2 puncte

$w_n = |a_n| + |b_n| + |c_n|$……………………………………………………………………………………………2 puncte

Alege $g_n(x) = x^n$……………………………………………………………………………………………………2 puncte

$|x^n| \le v_n$ nu este satisfăcută dacă $x = \sqrt[n]{2/3}$……………………………………………………………1 punct

Subiectul 4

(a) ………4 puncte

(b)………3 puncte

Notă: Doar pentru verificare (cazul $k = 1$) se acordă 2 puncte (= 1 punct (a) + 1 punct (b)).

Liceul Teoretic Grigore Moisil Urziceni
Strada Teilor, nr. 5

Concursul Interjudețean "Grigore Moisil" Urziceni Ediția a VI-a, 29-31 ianuarie 2010

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Calculați

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2010})}\ .$$

Subiectul 2. Fie mulțimea $\mathcal{F}=\{f:[0,1]\to[0,1] \mid f\ continu\text{ă},\ f(0)=0, f(1)=1\}$ și aplicația $T:\mathcal{F}\to(0,1)$ definită prin $T(f)=\int_0^1 f(x)\,dx$, oricare ar fi $f\in\mathcal{F}$. Demonstrați că:

a) T este surjectivă;

b) T nu este injectivă.

Subiectul 3. Determinați toate funcțiile $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ derivabile, cu derivata continuă, astfel încât oricare ar fi $x\in[0,\infty)$,

$$f(x)=\sqrt{2010+\int_0^x \left(f^2(t)+f'^2(t)\right)dt}\ .$$

Subiectul 4. Pe o mulțime nevidă S se definește o lege de compoziție " $*$ " astfel încât $x*x=x$ și $(x*y)*z=(y*z)*x$, oricare ar fi $x,y,z\in S$. Arătați că legea " $*$ " este comutativă.

BAREM CLASA A XII-A

Subiectul 1

$x = \operatorname{tg} t$..1 punct

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2010} t}{\sin^{2010} t + \cos^{2010} t} dt$..3 puncte

$I = \frac{\pi}{2} - I$, deci $I = \pi/4$...3 puncte

Subiectul 2

a) De exemplu constantă pe $[0, a]$ și liniară pe $[a, 1]$ sau invers..3 puncte

b) De exemplu constantă pe $[a, b]$ și liniară pe $[0, a]$ și $[b, 1]$..4 puncte

Subiectul 3

Ridicat la pătrat și derivare...2 puncte

$\left(f(x) - f'(x)\right)^2 = 0$, deci $f(x) = f'(x)$...3 puncte

$f(x) = \sqrt{2010}e^x$ ....2 puncte

Subiectul 4

$x * y = (x * y) * (x * y) =$..1 punct
$\left((x * y) * x\right) * y = \left((y * x) * x\right) * y =$...3 puncte
$\left((x * x) * y\right) * y = (x * y) * y = (y * y) * x = y * x$...3 puncte